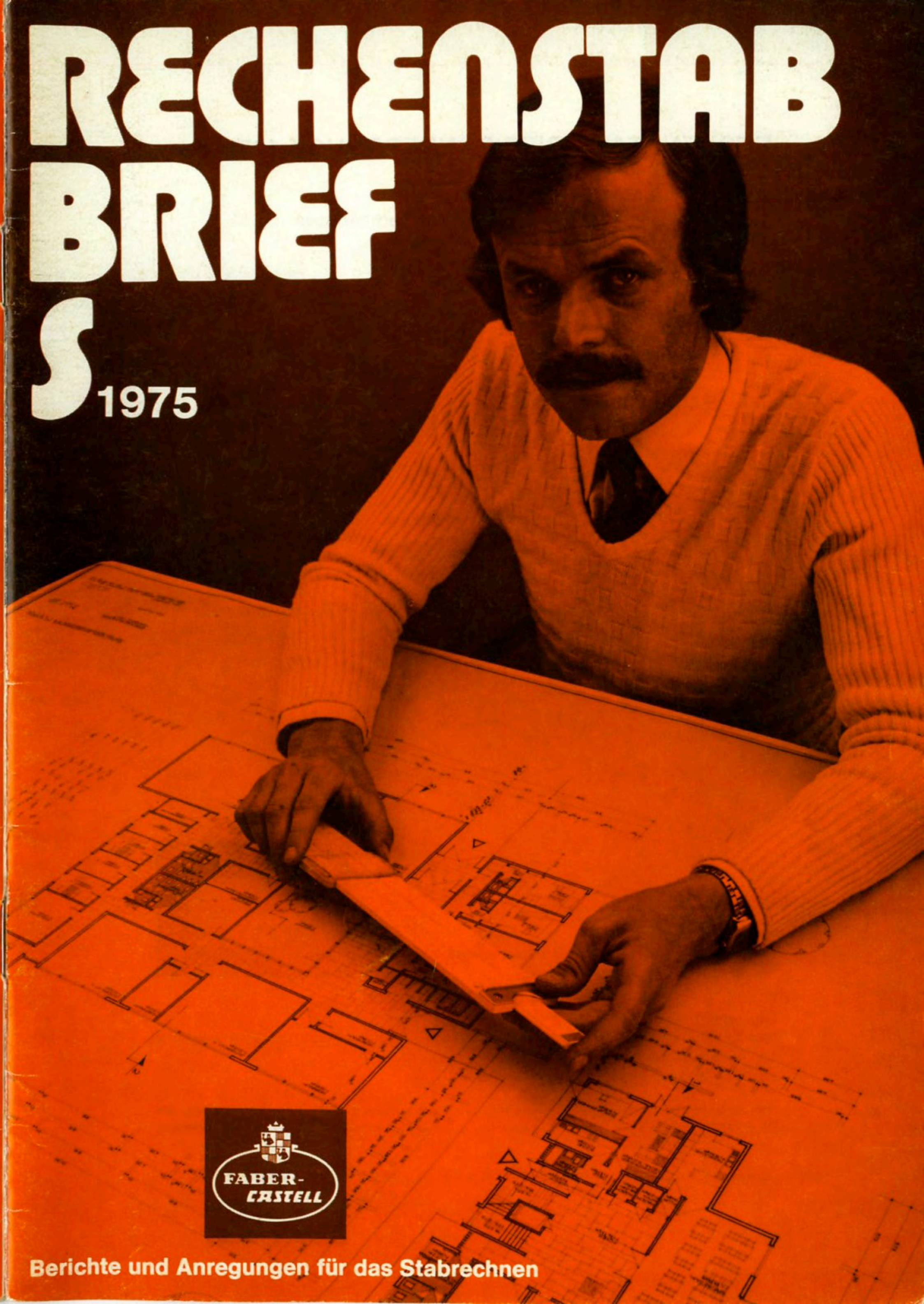
RECHENSTAB BRIEF

S 1975



FABER-CASTELL

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

RECHENSTAB-BRIEF SONDERDRUCK 1975

Franz Schwärzler, Bregenz
Das Arbeiten mit den linearen Skalen des Rechenstabes
Castell-Mentor 52/80

Anschrift des Verfassers:
Franz Schwärzler, Ammianusstraße 1/32, A-0900 Bregenz/Österreich

Verantwortliche Schriftleitung:
Dr. Peter Pirchan
Bereich Wissenschaftliche und Pädagogische
Publizistik der Firma Faber-Castell

Hinweis:
Der Castell-Rechenstab-Brief erscheint in zwangloser Reihenfolge und wird kostenlos an Interessenten verschickt.
Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Wir bitten die regelmäßigen Bezieher des Rechenstab-Briefes bei Ortswechsel um Mitteilung ihrer neuen Anschrft, damit wir unsere Kartei entsprechend ändern können.

Franz Schwärzler, Bregenz

Das Arbeiten mit den linearen Skalen des Rechenstabes Castell-MENTOR 52/80

Vorwort

Die meisten Autoren, die sich mit der Einführung des Rechenstabes befassen, beschreiben den Weg über den Additionsstab. Hauptsächlich wird an ihm die Tätigkeit des Streckenaddierens einsichtig gemacht. Sehr häufig wird vom methodischen Wert eines vom Schüler selbst verfertigten Additionsstabes gesprochen. Dieser Wert mag etwas überschätzt werden, er sei jedoch nicht bestritten.

Zwei entscheidende Nachteile haben solche „Eigenbaustäbe" aber auf jeden Fall. 1. Ihre Genauigkeit hängt sehr von der Geschicklichkeit und Gewissenhaftigkeit des herstellenden Schülers ab. Im Hinblick auf ein einwandfreies Arbeiten mit dem eigentlichen Rechenstab kann aber Genauigkeit nicht hochgenug eingestuft werden. 2. Die Dauerhaftigkeit und Funktionstüchtigkeit eines meist aus Karton gebastelten Stabes ist materialbedingt beschränkt.

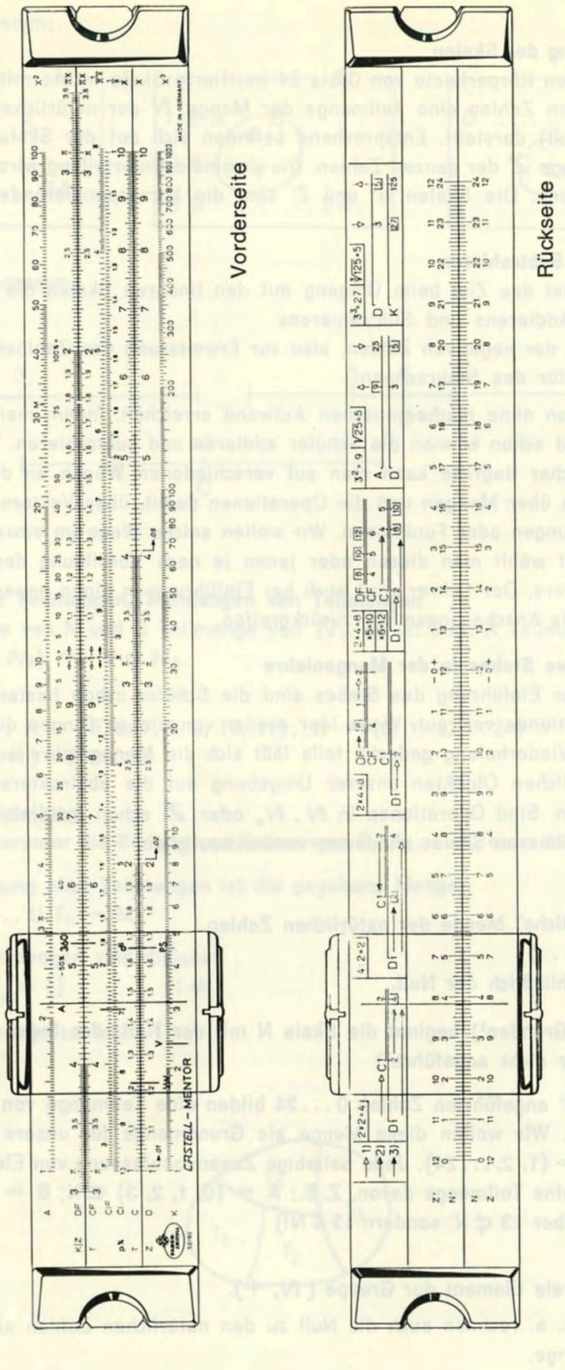
Die Firma A. W. FABER-CASTELL hat durch die linearen Skalen auf der Rückseite des MENTOR 52/80 diese beiden Nachteile entscheidend überwunden.

Die cm- und mm-Skalen sind dem Schüler häufig die einzigen vertrauten Skalen, mit denen er umzugehen gelernt hat, jedenfalls aber die geläufigsten. Es ist deshalb sinnvoll, ihm dieses bekannte Skalenbild für die in Frage kommenden Arbeiten vorzulegen. Überdies lernt er mit dem zugehörigen Läuferstrich auch den Umgang mit dieser unerläßlichen Hilfe auf dem eigentlichen Rechenstab kennen. Wenn der Lehrer den Läufer einmal nicht gebrauchen will, läßt er ihn einfach ganz nach rechts schieben und arbeitet nur mit den Skalen.

In der folgenden Abhandlung soll versucht werden, einige Hinweise für das Arbeiten mit den l i n e a r e n S k a l e n zu geben. Dabei will ich den Blick nicht nur auf die Vorbereitung des Stabrechnens lenken, sondern auch versuchen, die Skalen im Rahmen der neuen Mathematik, besonders der Mengenlehre, auszunützen. Sie geben nämlich mehr her, als man ihnen bei oberflächlicher Betrachtung zumuten würde.

Es wäre aber ein Mißverständnis, wenn der Leser diese Schrift als methodischen Lehrgang zur Erlernung des Stabrechnens auffassen würde. Vielmehr sind die Übungen und Betrachtungen passend in den Unterricht einzubauen.

Inhalt



1. **Die Bezeichnung der Skalen**

Die auf der unteren Körperleiste von 0 bis 24 bezifferte Skala wurde mit N bezeichnet, weil sie mit diesen Zahlen eine Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (einschließlich der Null) darstellt. Entsprechend befinden sich auf der Skala Z die ersten Elemente der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Die dezimale Unterteilung wird dabei vorerst außer acht gelassen. Die Skalen N' und Z' sind die korrespondierenden beweglichen Skalen.

2. **Addieren und Subtrahieren**

Im wesentlichen ist das Ziel beim Umgang mit den linearen Skalen die Erlernung des „mechanischen" Addierens und Subtrahierens

a) zur Einführung der negativen Zahlen, also zur Erweiterung des Zahlbereiches und

b) als Vorübung für das Stabrechnen.

Das Ziel kann man ohne mathematischen Aufwand erreichen, indem man einfach zeigt „wie es geht" und schon können die Schüler addieren und subtrahieren. Unter Verwendung mathematischer Begriffe kann man auf verschiedenen Wegen an das Ziel herankommen wie etwa über Mengen und die Operationen damit, über Vektoren, über Zuordnungen, Verknüpfungen oder Funktionen. Wir wollen solche Wege im einzelnen beschreiten. Im Unterricht wählt man diesen oder jenen je nach Vorbildung der Schüler bzw. Neigung des Lehrers. Der Lehrer wird auch bei Einführung in einen neuen Stoff auf die linearen Skalen als Anschauungsmittel zurückgreifen.

3. **Verwendung des Stabes in der Mengenlehre**

Zum Zeitpunkt der Einführung des Stabes sind die Schüler schon bestens mit Mengen und Mengenoperationen vertraut. Wenn hier wieder von diesen Dingen die Rede ist, so sei es teils als Wiederholung gedacht, teils läßt sich die Mengenlehre auf diesem Weg von den anschaulichen Objekten unserer Umgebung auf die abstrakteren des Zahlenreiches überführen. Sind Operationen in $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{Z}$ schon bekannt, so lassen sie sich anhand der linearen Skalen wiederum veranschaulichen.

3.1 Teilmengen

$\mathbb{N}$ ist die (unendliche) Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{N}$ einschließlich der Null.

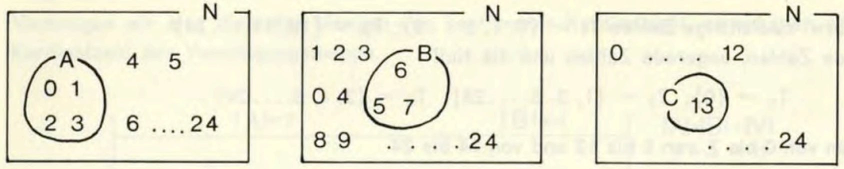
Aus praktischen Gründen[1]) beginnt die Skala N mit der Null; der Index $_0$ ist aber der Einfachheit halber nicht angeführt.[2])

Die auf N bzw. N' angeführten Zahlen 0 ... 24 bilden eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$: $\{0, 1, 2, 3, \dots 24\} \subset \mathbb{N}_0$. Wir wollen diese Menge als Grundmenge für unsere Betrachtungen heranziehen. $N = \{1, 2, \dots 24\}$. Jede beliebige Zusammenfassung von Elementen dieser Grundmenge ist eine Teilmenge davon. Z. B.: $A = \{0, 1, 2, 3\} \subset N$; $B = \{5, 6, 7\} \subset N$; $C = \{13\} \subset N$ (aber $13 \not\subset N$, sondern $13 \in N$)

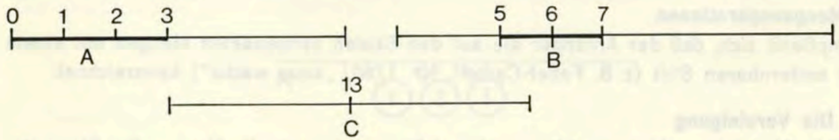
[1]) 0 ist das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{N}, +)$.

[2]) Meschkowski u. a. rechnen auch die Null zu den natürlichen Zahlen als Kardinalzahl der leeren Menge.

Im Venn-Diagramm:



Im Streckendiagramm:



3.1.1 Transitive Teilmengen, Teilmengen von Teilmengen

Ist A Teilmenge von N und G Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, so ist auch A Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.

$(A \subset G \wedge G \subset \mathbb{N}_0) \Rightarrow A \subset \mathbb{N}_0$.

Oder:

$B = \{6, 8, 10\}$; $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $N = \{0, 1, 2, \dots 24\}$

$(B \subset A \wedge A \subset N) \Rightarrow B \subset N$.

3.1.2 Klasseneinteilung

Man versteht darunter die Bildung von Teilmengen $T_1, T_2, \dots T_n$ einer Menge, so daß gilt:

1. Die Vereinigung aller Teilmengen ist die gegebene Menge

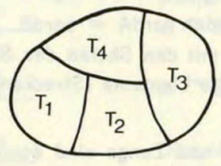
$T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n = M$

2. Je zwei Teilmengen sind disjunkt

$\bigwedge_{ij} : T_i \cap T_j = \{\} \qquad i \neq j$

3. Keine Teilmenge ist leer

$\bigwedge_{i} : T_i \neq \{\}$



Für die Elemente der Menge N (N') lassen sich beliebige Einteilungsgründe finden, um Klassen zu erhalten. Z. B.:

Ein- bzw. zweiziffrige Zahlen $T_1 = \{0, 1, 2 \ldots 9\}$; $T_2 = \{10, 11, \ldots 24\}$
Gerade Zahlen, ungerade Zahlen und die Null

$$T_1 = \{0\};\ T_2 = \{1, 3, 5, \ldots 23\};\ T_3 = \{2, 4, 6, \ldots 24\}$$

Zahlen von 0 bis 7, von 8 bis 13 und von 14 bis 24

$$T_1 = \{0, 1, 2, \ldots 7\};\ T_2 = \{8, 9, \ldots 13\};\ T_3 = \{14, 15, \ldots 24\}$$

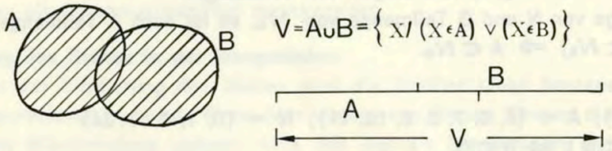
Warum ist die Einteilung in gerade Zahlen und Primzahlen keine Klasseneinteilung? (Streiche die Elemente der beiden Mengen ab und beurteile!)

3.2 Mengenoperationen

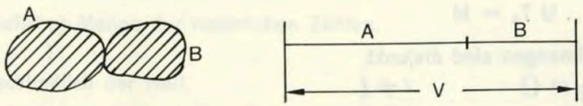
Es empfiehlt sich, daß der Anfänger die auf den Skalen verwendeten Mengen mit einem leicht entfernbaren Stift (z. B. Faber-Castell, Nr. 1750, „aqua wachs") kennzeichnet.

3.2.1 Die Vereinigung

Unter der Vereinigung V zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge aller Elemente, die zu A oder B oder beiden gehören.



Von besonderem Interesse ist die Vereinigung disjunkter Mengen, da sie zur Addition führt.



Bei gleichmächtigen oder äquivalenten Mengen kann man jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuordnen.

Gleichmächtige Mengen haben als gemeinsame Eigenschaft die gleiche Kardinalzahl:

$$A \sim B \iff |A| = |B| \text{ oder } \mathrm{card}A = \mathrm{card}B$$

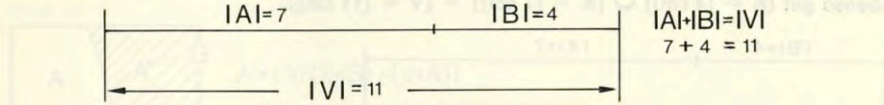
Die Kardinalzahl von Mengen, die mit den Skalen des Stabes gebildet werden, läßt sich jeweils unmittelbar ablesen, weil die Elemente (Strecken) numeriert sind.

Beispiel:

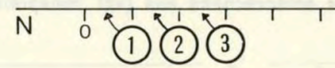
Die Mengen N und N' auf Körper und Zunge sind äquivalent, denn es läßt sich jedem Element aus N ein solches aus N' zuordnen und die Kardinalzahlen sind in beiden Mengen 24.

Solche Betrachtungen sind nützlich, um früher Gelerntes wieder aufzufrischen und — wie eingangs erwähnt — zu abstrahieren.

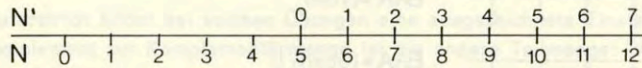
Vereinigen wir also disjunkte Mengen von bestimmter Kardinalzahl, so erhalten wir die Kardinalzahl der Vereinigungsmenge.



Wir wollen besonders beachten, daß die Zahlen auf N bzw. N' nicht die Punkte, sondern die **links davon liegenden Strecken als Elemente unserer Mengen** bezeichnen (numerieren).



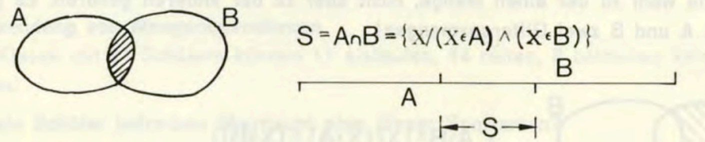
Daher vereinigen wir wie folgt:



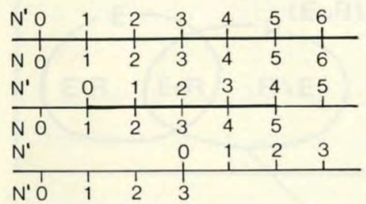
Man vereinigt eine 5-mächtige Menge mit einer 7-mächtigen und erhält eine 12-mächtige.

3.2.2 Der Durchschnitt

Unter der Durchschnittsmenge (Schnittmenge) S zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge der Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.



Der Durchschnitt zweier Strecken unserer Skalen hängt von der gegenseitigen Stellung ab:



Konjunkte Mengen:
$A \cap B = A = B = (6\text{ cm})$

$A \cap B = (4\text{ cm})$

Disjunkte Mengen:
$A \cap B = (0\text{ cm});\ \{\}$

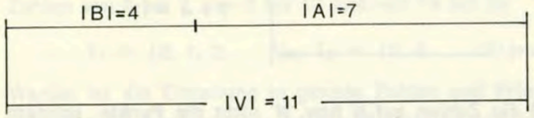
3.2.3 Das Kommutativgesetz

Ist eine Operation (Verknüpfung) kommutativ, so kommt trotz Vertauschens der Mengen das gleiche Ergebnis heraus.

$A \circ B = B \circ A$ o ... Verknüpfungszeichen

Wir habens eingangs $A = (7\ \text{cm})$ mit $B = (4\ \text{cm})$ zu $V = (11\ \text{cm})$ vereinigt.

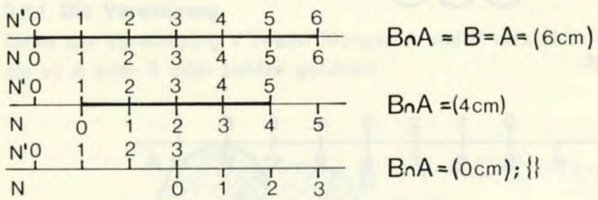
Ebenso gilt $(B = (4\ \text{cm})) \cup (A = (7\ \text{cm})) = (V = (11\ \text{cm}))$.



Die Vereinigung ist eine kommutative Operation: $A \cup B = B \cup A$

In Maßeinheiten: $7 + 4 = 11$ bzw. $4 + 7 = 11$

Für den Durchschnitt sieht dies entsprechend aus (vgl. Beispiele aus 3.2.2):

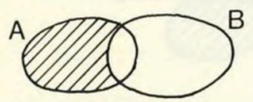


In allen Fällen hat sich gezeigt, daß der Durchschnitt ebenfalls kommutativ ist:

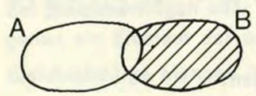
$A \cap B = B \cap A$

3.2.4 Die Differenzmenge, Restmenge

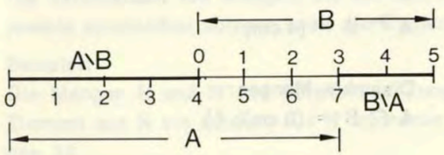
Unter der Differenzmenge D zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge der Elemente, die wohl zu der einen Menge, nicht aber zu der anderen gehören. Es gibt demnach aus A und B zwei Differenzmengen!



1. $A \setminus B = \{X / (X \in A) \wedge (X \notin B)\}$



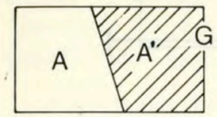
2. $B \setminus A = \{X / (X \in B) \wedge (X \notin A)\}$



Das Beispiel zeigt aber auch deutlich, daß die Bildung von Differenzmengen keine kommutative Operation ist: $A \setminus B \neq B \setminus A$

3.2.5 Die Komplementärmenge, Ergänzungsmenge

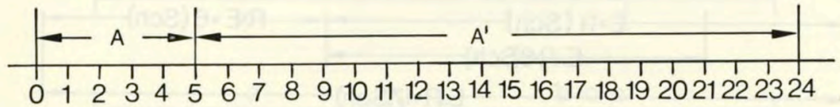
Unter der Komplementärmenge A' zur Teilmenge A in bezug auf die Grundmenge G versteht man alle Elemente der Grundmenge, die nicht zu A gehören.



$A' = \{X / (X \in G) \wedge (X \notin A)\}$

Wählen wir aus der Grundmenge unserer Skala N eine beliebige Menge A, so bilden die übrigen Elemente das Komplement zu A.

Beispiel: $G = N = \{1, 2, 3, \ldots 24\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Der Läuferstrich bildet bei solchen Übungen eine ausgezeichnete Einstellhilfe.

Das Komplement zur Komplementärmenge ist die andere Teilmenge: $(A')' = A$

Auch dies läßt sich schön veranschaulichen. Ist etwa A die Menge der einziffrigen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots 9\}$, so bilden in der Grundmenge N die Zahlen von 10 bis 24 die Komplementärmenge A'. Zur Menge der zweiziffrigen Zahlen sind aber die einziffrigen wieder die Komplementärmenge.

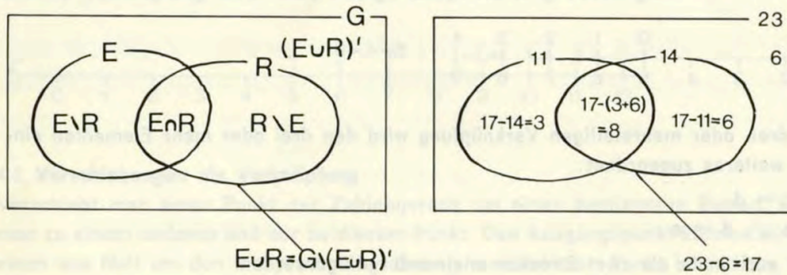
Im besonderen halte man auch fest, daß das Komplement zur Grundmenge die leere Menge ist und umgekehrt:

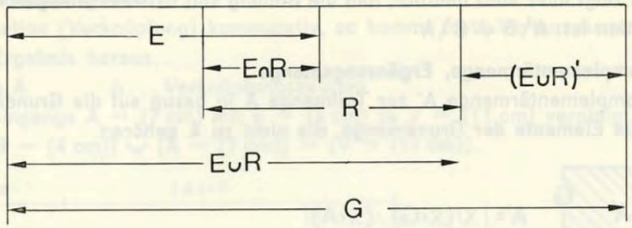
$G' = \{\};\quad \{\}' = G$

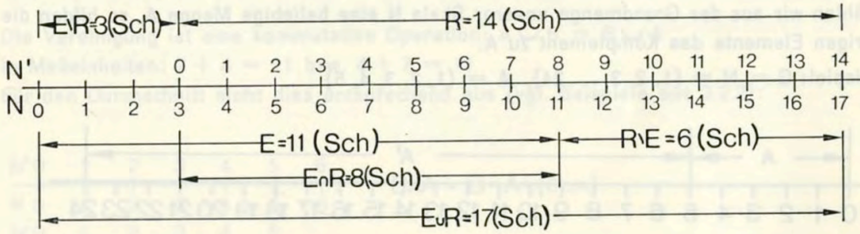
3.2.6 Anwendung von Mengenoperationen

In einer Klasse mit 23 Schülern können 11 eislaufen, 14 reiten, 6 betreiben keine dieser Sportarten.

a) Wieviele Schüler betreiben überhaupt eine dieser Sportarten?
b) Wieviele Schüler können nur eislaufen?
c) Wieviele Schüler können nur reiten?
d) Wieviele Schüler können beides?



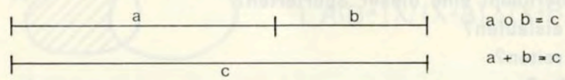


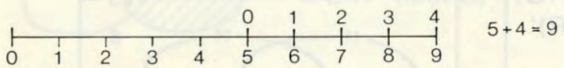


4. Verknüpfungen

4.1 Aneinanderfügen (Antragen) von Strecken

Unter einer zweistelligen Verknüpfung versteht man eine Vorschrift, die zwei Elementen eindeutig ein drittes Element zuordnet: $a \circ b = c$.
Gilt ferner $a, b \in M \wedge c \in M$, haben wir es mit einem abgeschlossenen Verknüpfungsgebilde zu tun.
Uns interessiert einmal, ob der Verknüpfung zweier Strecken eindeutig eine dritte entspricht. Aus der Erfahrung ist bekannt, daß zwei richtungsgleich aneinandergefügte Meterstäbe durch einen Doppelmeterstab ersetzt werden können. Das Aneinanderfügen zweier Strecken ist demnach gleichwertig der Addition zweier Zahlen, es sind zwei isomorphe Verknüpfungen.



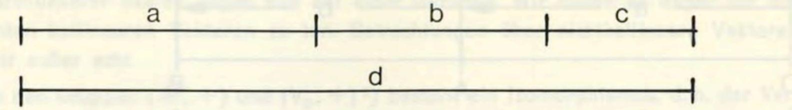


Bei einer drei- oder mehrstelligen Verknüpfung wird den drei oder mehr Elementen eindeutig ein weiteres zugeordnet:

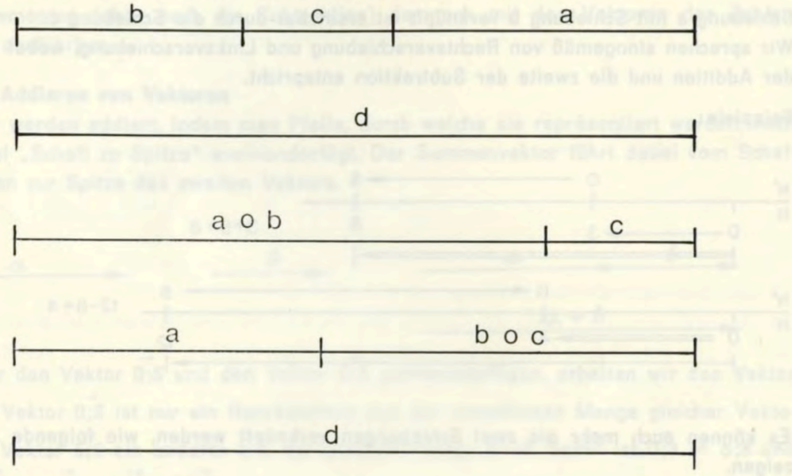
$a \circ b \,\square\, c = d$

$a \circ b \,\square\, c \,\triangle\, d = e$

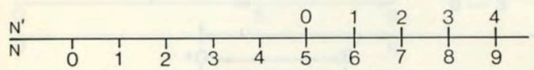
So können auch mehr als zwei Strecken aneinandergefügt werden.



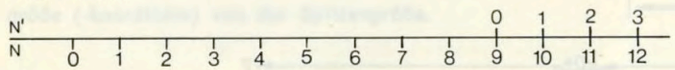
Diese Verknüpfungen sind sowohl kommutativ als auch assoziativ.



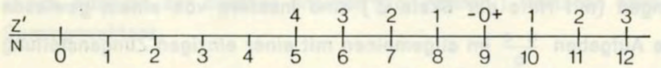
Unter Verwendung der Skalen N und N' sind dreistellige Verknüpfungen in zwei Schritten auszuführen (Assoziativität).
Beispiel: $5 + 4 + 3 = 12$
Erster Schritt:



Zweiter Schritt:

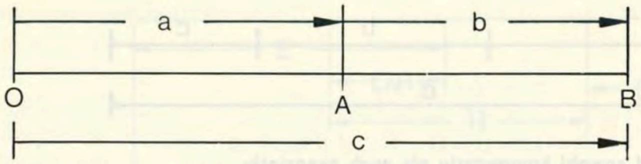


Wird hingegen die Skala Z' zur Skala N verwendet, so läßt sich auch eine dreistellige additive Verknüpfung durch eine einzige Zungenstellung bewältigen:



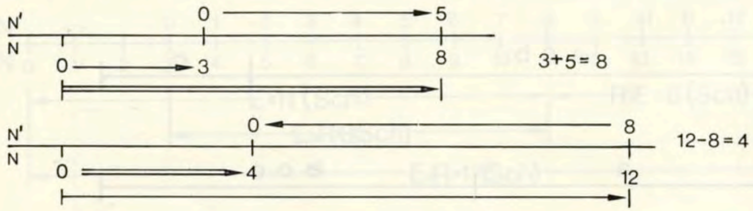
4.2 Verschiebungen als Verknüpfung

Verschiebt man einen Punkt der Zahlengerade um einen bestimmten Betrag, so gelangt man zu einem anderen und nur zu diesem Punkt. Den Ausgangspunkt können wir stets als einen aus Null um den entsprechenden Betrag verschobenen Punkt betrachten.

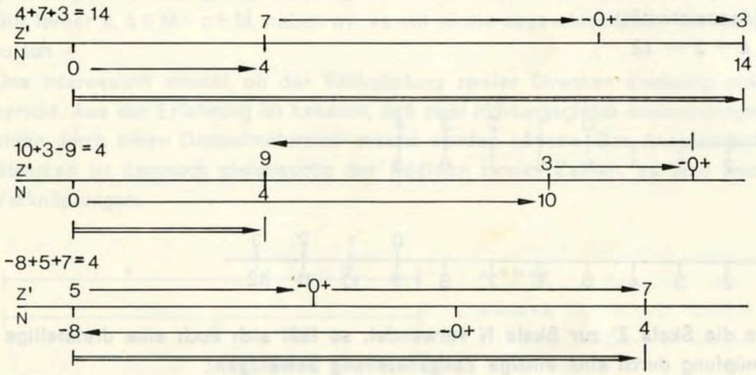


Schiebung a mit Schiebung b verknüpft ist ersetzbar durch die Schiebung c.
Wir sprechen sinngemäß von Rechtsverschiebung und Linksverschiebung, wobei die erste der Addition und die zweite der Subtraktion entspricht.

Beispiele:



Es können auch mehr als zwei Schiebungen verknüpft werden, wie folgende Beispiele zeigen.



Dreistellige Verknüpfungen (mit Hilfe der Skala Z') sind insofern von einem gewissen Wert, als wir später die Aufgaben $\frac{a \cdot c}{b}$ im allgemeinen mit einer einzigen Zungenstellung in den Skalen D und C sowie die Aufgabe $a \cdot b \cdot c$ ebenso einfach in D, CI und C lösen werden!

5. Vektoren

Die orientierte Verbindungsstrecke zweier Punkte A und B nennt man den Vektor

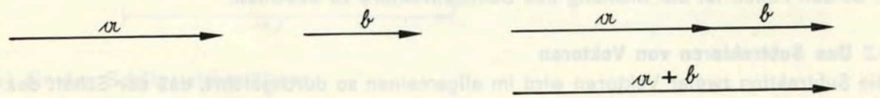
$\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$ bzw. $\overrightarrow{BA} = -\mathfrak{a}$

Die Punkte unserer Skalen liegen alle auf einer Geraden. Wir haben es daher nur mit sogenannten kollinearen Vektoren zu tun. Betrachtungen über nichtkollineare Vektoren lassen wir außer acht.

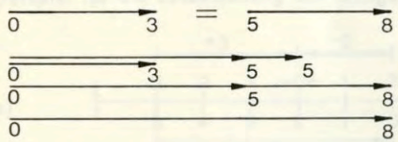
Zwischen den Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(V_g, +)$ [1]) besteht ein Isomorphismus, d. h. der Verknüpfung in der einen Gruppe entspricht eine genau definierte in der anderen Gruppe. Die von uns vornehmlich benutzte Menge $\mathbb{Z}$ ist Teilmenge von $\mathbb{R}$, und die Addition mit ihren Elementen (aber auch die Subtraktion) demnach mit den Vektoren der Zahlengeraden ausführbar.

5.1 **Das Addieren von Vektoren**

Vektoren werden addiert, indem man Pfeile, durch welche sie repräsentiert werden, nach der Regel „Schaft zu Spitze" aneinanderfügt. Der Summenvektor führt dabei vom Schaft des ersten zur Spitze des zweiten Vektors.



Wenn wir den Vektor 0;5 und den Vektor 0;3 aneinanderfügen, erhalten wir den Vektor 0;8. Der Vektor $\overrightarrow{0;3}$ ist nur ein Repräsentant aus der unendlichen Menge gleicher Vektoren, der Vektor $\overrightarrow{5;8}$ ein anderer aus der gleichen Menge 0—8. Somit ist $\overrightarrow{0;3} = \overrightarrow{5;8}$ und
$\overleftarrow{0;5} + \overrightarrow{0;3} = \overrightarrow{0;5} + \overrightarrow{5;8} = \overrightarrow{0;8}$



N' 5 über 0
0 — 3 5 — 8

Die Länge eines Vektors[2]) (Betrag des Vektors) erhält man durch Subtraktion der Schaftgröße (-koordinate) von der Spitzengröße.

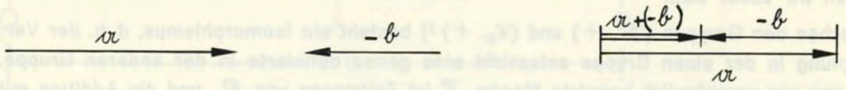
$\mathfrak{a} = \overrightarrow{4;11}$
$a = |\mathfrak{a}| = 11 - 4 = 7$ (Längeneinheiten)

Durch Addition der Beträge unserer (kollinearen!) Vektoren erhält man den Betrag des Summenvektors.

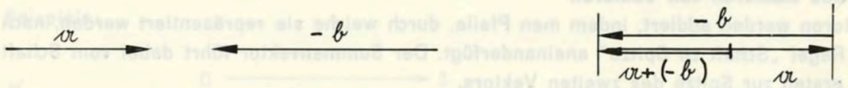
$\mathfrak{a} = 0;5$ —— $a = 5 - 0 = 5$
$\mathfrak{b} = 5;8$ —— $b = 8 - 5 = 3$
$a + b = 5 + 3 = \underline{\underline{8}}$

[1]) V_g .. Vektor der Zahlengeraden
[2]) Gilt nur in der Zahlengeraden, nicht aber in R_2 oder R_3!

Die Additions eines inversen Vektors (Linkspfeil) wird genau gleich durchgeführt.



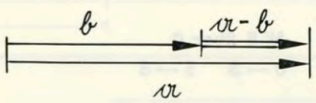
Ist $|-\mathfrak{b}| > |\mathfrak{a}|$, so gelangen wir in den Bereich der negativen Zahlen.



In beiden Fällen ist die Richtung des Summenvektors zu beachten.

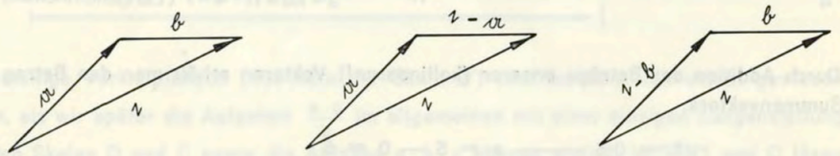
5.2 **Das Subtrahieren von Vektoren**

Die Subtraktion zweier Vektoren wird im allgemeinen so durchgeführt, daß der Schaft des zweiten zum Schaft des ersten Vektors kommt und der Differenzvektor von der Spitze des zweiten zur Spitze des ersten Vektors zeigt.

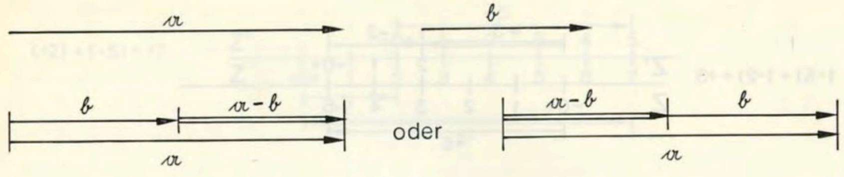


Es muß aber der Vollständigkeit halber gesagt werden, daß es noch eine zweite Art des Subtrahierens gibt.

Die Gleichung $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ hat zwei Umkehrungen: $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b}$



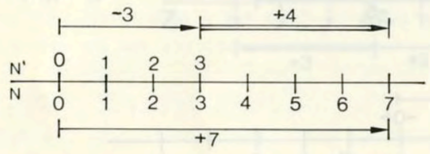
Daher gilt für die Subtraktion auch: Spitze des zweiten Vektors zur Spitze des ersten. Der Differenzvektor zeigt vom Schaft des ersten zum Schaft des zweiten Vektors. Wir werden bald sehen, daß diese Art manchmal (vor allem für den Schüler) die durchsichtigere ist.



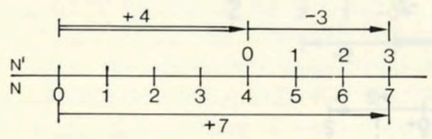
Dies führt auch zu zwei möglichen Subtraktionsarten mit dem Rechenstab.

Beispiel: $7 - 3 = 4$

a)

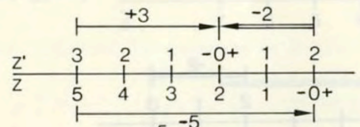


b) für den Schüler sicher klarer

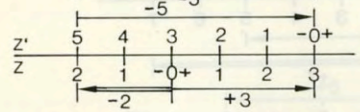


Beispiel für die Einbeziehung der Menge $\mathbb{Z}$: $3 - 5 = -2$

a)



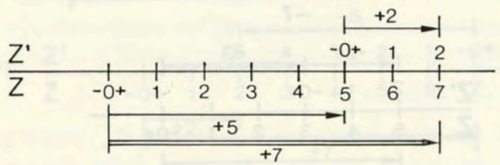
b)



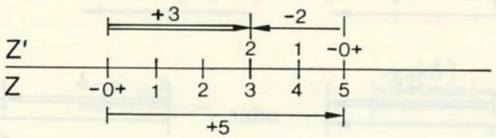
Im folgenden werden alle 16 Fälle der Addition und Subtraktion mit relativen Zahlen gezeigt.

1. $|\mathfrak{a}| > |\mathfrak{b}|$
2. $|\mathfrak{a}| < |\mathfrak{b}|$

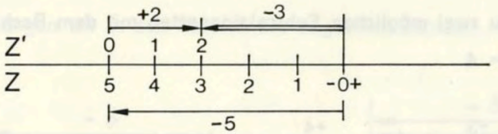
(+5) + (+2) = +7



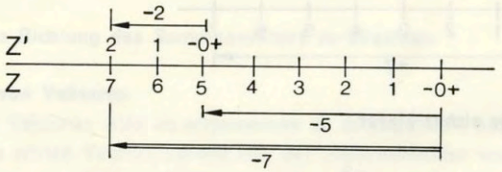
(+5) + (-2) = +3



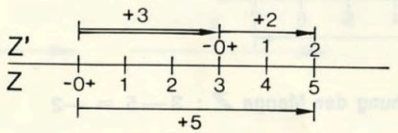
(-5) + (+2) = -3



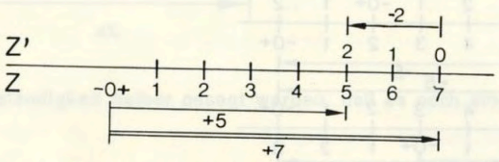
(-5) + (-2) = -7



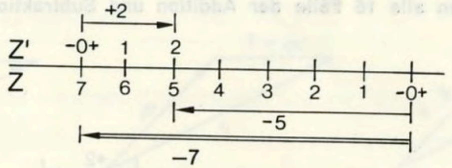
(+5) - (+2) = +3



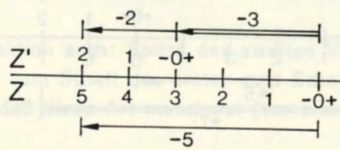
(+5) - (-2) = +7



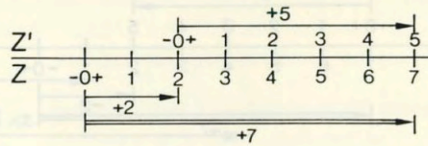
(-5) - (+2) = -7



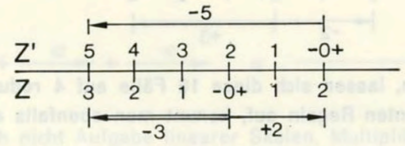
(-5) - (-2) = -3



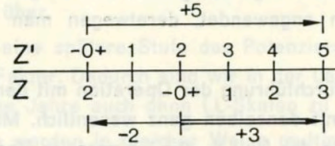
(+2) + (+5) = +7



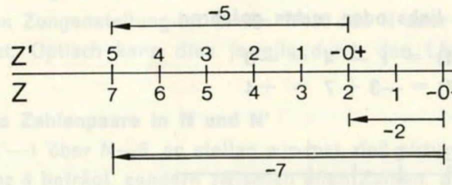
(+2) + (-5) = -3



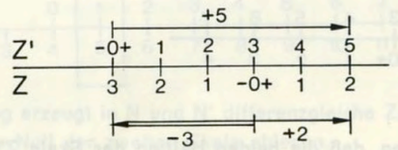
(-2) + (+5) = +3



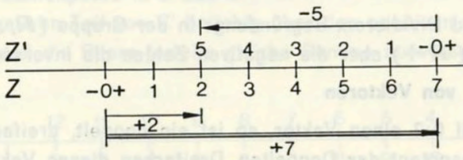
(-2) + (-5) = -7



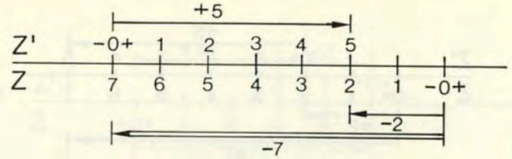
(+2) - (+5) = -3



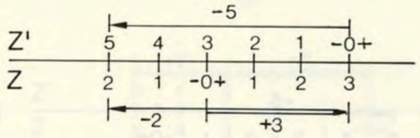
(+2) - (-5) = +7



(-2) - (+5) = -7



(-2) - (-5) = +3

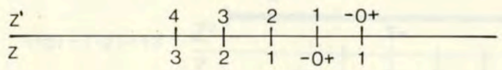


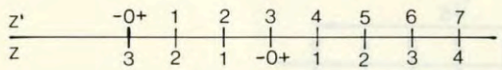
Wie die Ergebnisse zeigen, lassen sich diese 16 Fälle auf 4 reduzieren. Löst man die Klammern nach den bekannten Regeln auf, kommt man ebenfalls auf die verbleibenden 4 Fälle.

Mit der Addition und besonders mit der Subtraktion von Vektoren sind wir über die Menge der natürlichen Zahlen hinaus in die Menge der ganzen Zahlen gekommen und haben die Rechenregeln für relative Zahlen angewendet, deretwegen man im Unterricht häufig Rechenstreifen anfertigen läßt.

Löst man die Klammern vor der Durchführung der Operation mit den linearen Skalen auf, so vereinfacht sich der Umgang mit denselben ganz wesentlich. Man erkennt dann, daß die Rechenzeichen links und rechts der Null (—0+) einerseits Vorzeichen für den Ausgang und das Ende der Rechnung und andererseits Verknüpfungszeichen für den Gang der Rechnung darstellen. Zur ersten Zahl wird die Null von Z' gesetzt und je nach Verknüpfungsvorschrift nach links oder rechts gefahren.

Beispiele: $(+1) + (-4) = 1 - 4 = -3$
$(-3) - (-7) = -3 + 7 = +4$

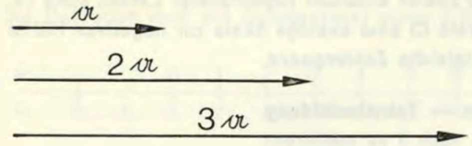




Es darf ferner bemerkt werden, daß die beiden Hälften der Skala Z' in der Anwendung eigentlich zwei Skalen entsprechen. Z'+ wird zur Additions- und Z'— zur Subtraktionsskala. Das Analogon dazu finden wir beim richtigen Stabrechnen in den Skalen C und CI beim Multiplizieren und Dividieren. Begründung: In der Gruppe $(\mathbb{R}, \cdot)$ sind die Reziprokwerte, in der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ aber die negativen Zahlen die inversen Elemente.

5.3 **Das Multiplizieren von Vektoren**

Repräsentiert der Pfeil 0;2 einen Vektor, so ist ein doppelt, dreifach so langer gleichgerichteter Pfeil Repräsentant des Doppelten, Dreifachen dieses Vektors.



Durch fortgesetztes Hinzufügen des gleichen Vektors erhalten wir Vielfache dieses Vektors.

Es ist an und für sich nicht Aufgabe linearer Skalen, Multiplikationen auszuführen. Zwei Gründe ließen mich jedoch dieses Thema kurz erwähnen:

1. Wir wecken den Wunsch nach einem Multiplikationsstab, leiten also auf den eigentlichen Rechenstab über.
2. Wir fundieren für eine spätere Stufe das Potenzieren als fortgesetztes Multiplizieren mit dem gleichen Faktor. Dadurch sind wir in der Lage, Aufzinsungs- oder Wachstumsfaktoren für wenige Jahre auch ohne LL-Skalen zu bestimmen.

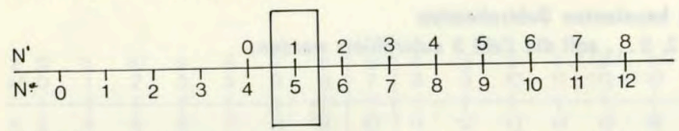
Linksgerichtete Pfeile werden in gleicher Weise multipliziert. Man wird an dieser Stelle mit Nutzen auch einmal Dezimalzahlen anwenden, also mit den mm-Strichen arbeiten.

6. **Zuordnungen**

Bei einer beliebigen Zungenstellung ist einem Wert aus N oder Z irgendein Wert aus N' oder Z' zugeordnet. Optisch kann dies jeweils durch den Läuferstrich hervorgehoben werden.

6.1 **Differenzgleiche Zahlenpaare in N und N'**

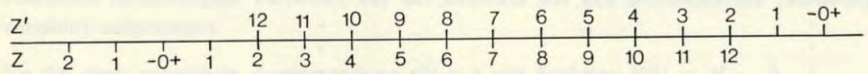
Bringen wir z. B. N'—1 über N—5, so stellen wir fest, daß nicht nur zwischen diesen zwei Zahlen die Differenz 4 beträgt, sondern zwischen allen Zahlen, die einander durch Läuferstrich zugeordnet werden können.



Jede Zungenstellung erzeugt in N und N' differenzgleiche Zahlenpaare. Die Differenz läßt sich jeweils bei der Null der zweiten Skala ablesen.
Beim eigentlichen Stabrechnen finden wir in C/D quotientengleiche Zahlenpaare.

6.2 **Summengleiche Zahlenpaare in Z und Z'**

Bringen wir den negativen Teil von Z' beliebig über den positiven von Z oder umgekehrt, so stellen wir fest, daß die Paare jeweils gleiche Summe aufweisen.



In der gezeichneten Stellung ist die Summe zweier einander zugeordneter Zahlen stets 14. Auch diesmal finden wir in der inversen Skala CI eine analoge Skala zur negativen Hälfte von Z'. Jede Stellung D/CI erzeugt produktgleiche Zahlenpaare.

6.3 **Addition eines konstanten Summanden — Tabellenbildung**
Zu den Zahlen 0, 1, 2, 3 ... ist der Reihe nach 5 zu addieren:

$0 + 5 = 5$
$1 + 5 = 6$
$2 + 5 = 7$
.
.
.

Wegen der Kommutativität der Addition darf man auch schreiben:

$5 + 0 = 5$
$5 + 1 = 6$
$5 + 2 = 7$
.
.
.

N'						0	1	2	3	4	5	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N						0	1	2	3	4	5	6	7

Je nach der gewählten Zungenstellung ist jede Zahl in N' um 5 größer als die zugeordnete in N oder umgekehrt.

6.4 **Subtraktion eines konstanten Subtrahenden**
Von den Zahlen 0, 1, 2, 3 ... soll die Zahl 3 subtrahiert werden:

$0 - 3 = -3$
$1 - 3 = -2$
$2 - 3 = -1$
.
.
.

Da nur die Addition kommutativ ist, schreiben wir:

$0 + (-3) = -3$ Daraus ergibt sich: $(-3) + 0 = -3$
$1 + (-3) = -2$ $(-3) + 1 = -2$
$2 + (-3) = -1$ $(-3) + 2 = -1$
.
.
.

Die Operation muß mit (mindestens) einer Z-Skala durchgeführt werden

N'			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Z	5	4	3	2	1	-0+	1	2	3	4	5	6

oder:

Z'	2	1	-0+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	5	4	3	2	1	-0+	1	2	3	4	5	6	7

7. **Funktionen**
Eine eindeutige Zuordnung nennt man eine Abbildung oder Funktion. Wir haben uns wegen des Aufbaues der Skalen eigentlich schon bei den Zuordnungen mit Funktionen befaßt ohne dies auszudrücken.

Sogar wenn wir die Zunge entfernen und nur die Skalen N und Z betrachten, zeigt sich, daß alle Werte von Z in genau definierter Weise von denen in N abhängig sind. Es besteht die Funktion $f\colon N \rightarrow N - 12$ oder $f(N) = N - 12$ oder $Z = N - 12$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Z	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-0+	1	2

Gleiches gilt, wenn die beweglichen Skalen in irgendeiner Stellung zu den Körperskalen sind.

Bringen wir etwa N'-0 zu N-3, so bestehen folgende Funktionen:

für N': $f(N) = N - 3$ bzw. $f(Z) = Z + 9$
für Z': $f(N) = N - 15$ bzw. $f(Z) = Z - 3$

Z'	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-0+	1	2
N'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Z	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-0+	1	2	3	4	5

z.B.: 10-3=7 -2+9=7
10-15=-5 -2-3=-5

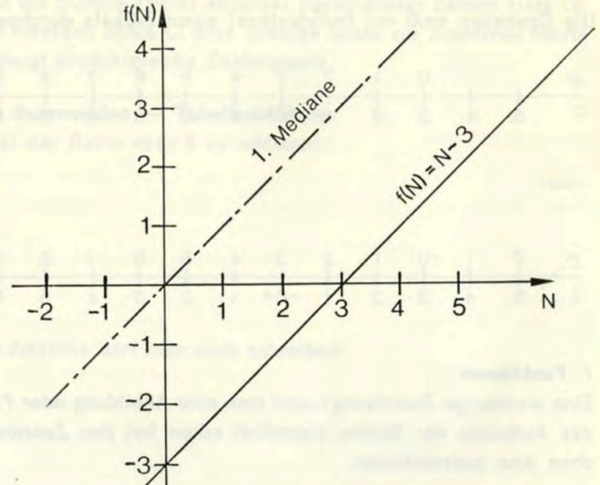
Funktionen lassen sich graphisch darstellen. Gewöhnlich verwendet man dazu ein orthogonales oder kartesisches Koordinatensystem. Auf der Abszisse wird der Wert des Urelementes (unabhängige Variable), auf der Ordinate der des Bildelementes (abhängige Variable) aufgetragen.

Für die oben angeführte Zungenstellung gilt u. a. die Funktion $f(N) = N - 3$.

f(N) = N-3

Wertetabelle:

N	f(N)
0	-3
1	-2
2	-1
3	0
4	1
-1	-4
-2	-5

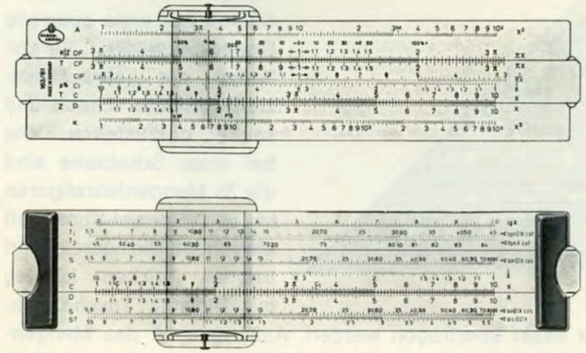


Der Funktionsgraph ist hier wie in allen weiteren Fällen eine Gerade unter 45°, also parallel zur ersten Mediane.

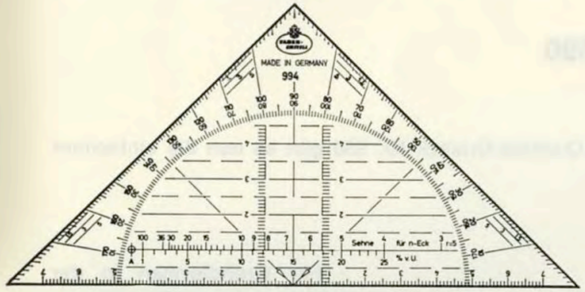
Zieht man die allgemeine Gleichung der Geraden $y = kx + d$ zum Vergleich heran, so sieht man, daß die Steigung k stets 1 ist und die additive Funktionskonstante d dem konstanten Glied (im Beispiel —3) der Unterschiedsgröße entspricht, die man aus der Zungenstellung ablesen kann.

Aus dem Hause FABER-CASTELL

Wir stellen vor ....
Taschen-Rechenstab Novo-Mentor Nr. 163/81



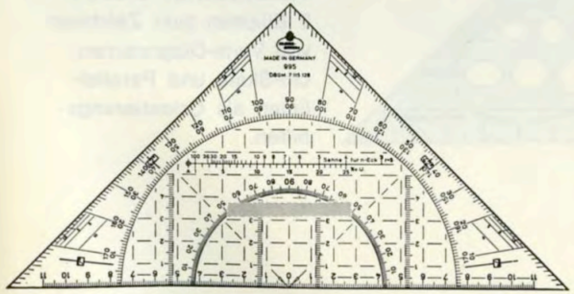
Zum Schulrechenstab Novo-Mentor 52/81 in 25 cm-einen Taschen-Rechenstab. Diese leicht ablesbare Teilungskombination bietet Ingenieuren und auch mathematisch weniger versierten Kaufleuten arbeitserleichternde Rechenvorteile. Mathematisch-technisch orientierte Schüler benützen den „Taschen-Novo-Mentor" als Zweitgerät für unterwegs. Durch das Westentaschenformat des Stabes ist der Schüler frei von Transportproblemen. Überall ist der Taschen-Stab schnell zur Hand. Die z. T. verschiedenfarbig unterlegten Skalen mit deutlichen, gut lesbaren Zahlen machen auch komplizierte Rechnungen zum Kinderspiel.



KOMBI-DREIECK Nr. 994
erweiterte Ausführung des 993 N, auch für das Zeichnen mit Tusche.

Hypotenuse 16 cm lang.

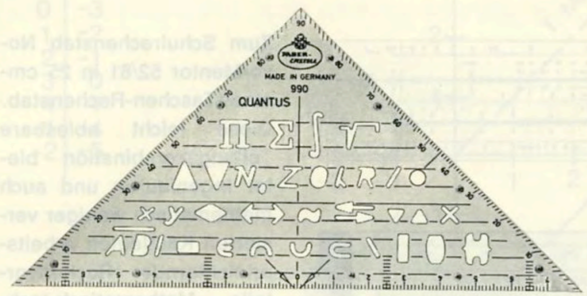
TEKA-DREIECK 995 mit abnehmbarem, umsteckbarem Griff, Anlageschuhen (verhindern das Rutschen des Dreiecks unter die Kanten der Anlageschiene) und einem reichhaltigen, gut lesbaren Skalenbild:



- 3 Teilungen für Winkelgrade
- Abstandsmarkierungen für Schraffur 1,5; 3; 5; 10 mm
- Markierung des 45°-Winkels
- Marken für dimetrische Projektion 7° und 42°
- Koordinatenskala
- Hilfsskalen zum Parallelenziehen im mm-Abstand

Hypotenuse 25 cm lang.

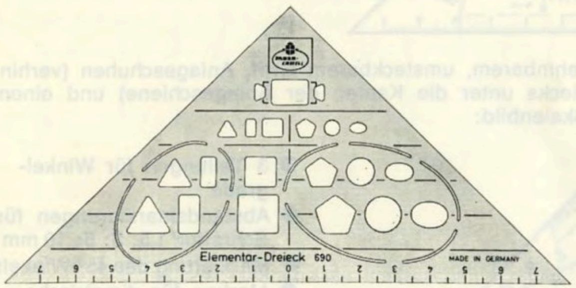
Mengenlehre-Dreieck Quantus Nr. 990



Für die Symbolschrift der Mengenlehre hat Faber-Castell das erste spezielle Dreieck entwickelt. Es soll helfen, die gebräuchlichsten Symbole schnell und sauber darzustellen. Wie bei einer Schablone sind die 35 Mengenlehrefiguren in den Spezial-Kunststoff eingefräst. Die ausreichend breiten Zeichen können mit Bleistift, Tuschezeichner oder auch Kugelschreiber exakt übertragen werden. Außerdem ist das Mengenlehredreieck „QUANTUS" mit Hilfsskalen wie Parallel-Lineal, Winkelmesser und Maßstab ausgestattet.

Elementar-Dreieck Nr. 690

Anschließend an das erfolgreiche Quantus-Dreieck Nr. 990 gibt es nun die einfachere Form für die Grundstufen.



Für Grundformen in der Mengenlehre (Dreieck, Rechteck, Quadrat, Fünfeck, Kreis, Ellipse) in 3 verschiedenen Größen;
2 Ellipsen zum Zeichnen von Venn-Diagrammen;
cm-Skala und Parallellinien als Orientierungshilfen.